

Задача

При определенном базисе V и V^* элемент v из V^* можно представить векторами, а элемент v из V — координатами или векторами.

Теорема / Лемма

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V . Тогда для $e^1, \dots, e^n$, где $e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$

справедливо $e^1, \dots, e^n$ — базис V^* , который называется базисом V^* .

Глава 3. Собственные значения и собственные векторы

Вектору или оператору $A: V \rightarrow V$.

Скаляр λ и ненулевой вектор x называются собственным значением и собственным вектором оператора A , если $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$.

Пример

1. Оператор A в V называется симметричным (или эрмитовым), если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любых $x, y \in V$.

2. Если A — оператор в V , то A^T называется транспонированным оператором.

Если A — симметричный оператор, то собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ являются вещественными числами, а соответствующие им собственные векторы $x_1, \dots, x_n$ образуют базис V .

Теорема

Пусть дан линейный оператор $A: V \rightarrow V$. Пусть $u \neq 0$ — собственный вектор A с собственным значением λ . Тогда $Au = \lambda u$. Если u — собственный вектор A с собственным значением λ , то $Au = \lambda u$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \text{ где } A_0, A_1, A_2 \text{ — операторы}$$

Доказательство:

Пусть $e_1, \dots, e_m$ — базис в U , $e_{m+1}, \dots, e_n$ — базис в $U^\perp$. Тогда $Ae_i = \lambda e_i$, $1 \leq i \leq m$, тогда:

$$Ae_1 = \lambda e_1, Ae_2 = \lambda e_2, \dots, Ae_m = \lambda e_m, Ae_{m+1} = \dots = Ae_n = 0$$

$$Ae_m = \lambda e_m + \dots + \lambda e_{m+1} + \dots + \lambda e_n$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \quad A_1 = (m \times n) \text{ матрица}$$

A_1 — матрица оператора A , введен на пространстве U .

Замечание

Если матрица имеет диагональное строку, то пространство $U = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ инвариантно относительно A .

Если $\lambda = 0$, тогда пространство $W = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$ тоже инвариантно относительно A .

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \quad A_1 = A|_U \quad A_2 = A|_{U^\perp} \Rightarrow A = A_1 \oplus A_2 \text{ — минимальное представление}$$

Теорема

Пусть V — линейное пространство, A — линейный оператор на V . Пусть $u \neq 0$ — собственный вектор A с собственным значением λ . Тогда $Au = \lambda u$. Если u — собственный вектор A с собственным значением λ , то $Au = \lambda u$.

Пусть u — собственный вектор A с собственным значением λ . Тогда $Au = \lambda u$.

Пусть u — собственный вектор A с собственным значением λ . Тогда $Au = \lambda u$.

Пусть u — собственный вектор A с собственным значением λ . Тогда $Au = \lambda u$.

Пусть u — собственный вектор A с собственным значением λ . Тогда $Au = \lambda u$.

Теорема

Пусть u — собственный вектор A с собственным значением λ . Тогда $Au = \lambda u$.

Пусть u — собственный вектор A с собственным значением λ . Тогда $Au = \lambda u$.

Замечание

Пусть u, v — собственные векторы A с собственными значениями λ, μ . Тогда $A(u+v) = \lambda u + \mu v$.

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y) = \lambda^2 x + \mu^2 y = \lambda(\lambda x + \mu y)$$

$V^\perp = \{v \in V \mid Av = \lambda v\} + \{0\}$ неперпендикулярно к $\{0\}$
 у 0 и всех векторов, он $\in \{0\}$.
 $\dim V^\perp =$ наименьшее кратность λ (или мин. м. в. вектора)

Теорема

Собственные векторы $x_1, x_2, \dots$ образуют линейно независимую систему векторов.

Доказ. (по индукции от k)

$k=1: \lambda x_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

$k=k: A(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_k x_k) = 0 \quad (1)$

$\lambda_1 A(x_1) + \dots + \lambda_{k-1} A(x_{k-1}) + \lambda_k A(x_k) = 0$

$\lambda_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k-1} \lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_k \lambda_k x_k = 0$

$\lambda_1 \lambda_k x_1 + \dots + \lambda_k \lambda_k x_k = 0 \quad (2)$

$\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \dots + \lambda_k (\lambda_k - \lambda_k) x_k = 0$
 $= 0$

$\rightarrow \lambda_1 = 0$
 $\rightarrow x_1, x_2, \dots$ все мин. м. в. векторы.

Следствие

Линейный оператор S n -мерный $\Rightarrow$ имеет $\leq n$ сов. в. в.

§2. Характеристический многочлен

Пусть X - собственный вектор.

Тогда $AX = \lambda X$, т.е. $(A - \lambda E)X = 0$, $X \neq 0$

$\ker(A - \lambda E) \neq 0$, то $\Rightarrow \exists$ ненулев. $\det(A - \lambda E) = 0$.

Опр. Характеристический многочлен матрицы A $\chi_A(\lambda)$ вычисляется по формуле: $\det(A - \lambda E)$

Пусть дан φ - л. о. оператора.

А и B - матрицы φ в базисах e и e' $\Rightarrow B = T^{-1}AT$.
 A и B - подобные матрицы

Теорема

Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Доказ.

$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda I^{-1}I) = \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) =$
 $= \det T^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det T = \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda)$

Все матрицы 9×9 и 10×10 имеют ненулевые характеристические многочлены, т.е. они не являются 0-матрицей.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = a_{11}(-\lambda) + a_{12}(-\lambda)^2 + \dots + a_{1n}(-\lambda)^{n-1} + \dots$$

Теорема Гамильтона - Кэли

Матрица A размера $n \times n$ над полем F . $\chi_A(A) = 0$.

Доказательство

Вспомогательная матрица $A - \lambda I$. $V \rightarrow V$ линейное отображение. $V = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, где v_i базисные векторы.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

$$A e_1 = \lambda_1 e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n$$

$$A e_2 = 0 \cdot e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + 0 \cdot e_n$$

т.е. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные значения A .

Пример: не квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $A^2 = 0$. Если $T^{-1}AT = D$, то $D^2 = T^{-1}AT \cdot T^{-1}AT = T^{-1}A^2T = 0$.

$$D^2 = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow A = 0.$$

$\Rightarrow$ невозможное $\Rightarrow$ предположение неверно.

$$a_0 = f(0) = \det A$$

$$a_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{tr} A$$

a_{n-k} - сумма главных миноров k -го порядка.

Страну обозначается:

$$|A - \lambda B| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \dots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix}$$

В матрице определителей $A - \lambda B$ есть сумма главных миноров k -го порядка.

Рассмотрим $f(\lambda) = \det(A - \lambda B)$. Если B обратима, то $f(\lambda) = \det B \cdot \det(A - \lambda B^{-1})$. Тогда $f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda B^{-1}) = 0$.

$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E|$ - характеристический полином матрицы A . Если A квадратная матрица, то $\chi_A(\lambda) = 0$ имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \text{tr} A = 7 + 1 + 4 = 12$$

$$I_2 = \det A = -35$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 2 \cdot 12 = 28 - 24 = 4$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 30\lambda - 35 = 0$$

$$A: V \rightarrow V$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

Всегда найдутся собственные значения.

$$\text{alg mult}_A(\lambda_i) = n_i$$

Всегда найдутся несовпадающие значения

$$V^{\lambda_i} = \{x \mid Ax = \lambda_i x\} \text{ ир } \lambda \text{ собствен. значение, ир } \lambda \text{ c.з. } \lambda$$

$$\text{geo mult}_A(\lambda_i) = \dim V^{\lambda_i}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$$

$$\text{alg mult}(0) = 2$$

$$\textcircled{a} Ax = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 0 \quad V_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

найдем сразу $\text{geo mult}_A(0) = 1$

т.к. $\text{alg mult} \neq \text{geo mult} \Rightarrow$ generalized eigenvalue.

Удобство:

Трансформация в собственные c.з. λ и преобразование в собственные значения.

Доб-во: если λ - собственное и λ - собственное значение, то V^{λ_1} и V^{λ_2} не пересекаются, т.е. $V^{\lambda_1} \cap V^{\lambda_2} = \{0\}$

Пример: V^{λ_1} и V^{λ_2} не пересекаются.

$$\text{Рассм оператор } A_1 = A|_{V^{\lambda_1}}$$

$$\text{m.к. изогнутое значение оператора}$$

$$\det(A_1 - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^m$$

Рассм оператор A_1 на V^{λ_1} . Если V^{λ_1} имеет размерность n_1 , то $A_1|_{V^{\lambda_1}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdot \chi_1(\lambda)$$

$$\chi_1(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1}$$

Теорема (о разложении Л.О.)

Пусть V - линейное пространство над полем P (P - коммутативное кольцо).

A - линейный оператор $\Leftrightarrow$ матрица A над P .

- 1) Все корни $\chi_A(\lambda)$ лежат в P
- 2) Если $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - различные собственные значения A , то $V^{\lambda_1} \cap V^{\lambda_2} = \{0\}$

Доб-во:

1, 2 $\Rightarrow$ разложение Л.О.

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$$

Рассм оператор $A|_{V^{\lambda_i}}$ на V^{λ_i} и V^{λ_j} для $i \neq j$.

$$V^{\lambda_i} \cap V^{\lambda_j} = \{0\} \Rightarrow \dim(V^{\lambda_i} \cap V^{\lambda_j}) = 0$$

Рассм оператор $A|_{V^{\lambda_i}}$ на V^{λ_i} и V^{λ_j} для $i \neq j$.

(если оператор A имеет значение λ_1 , то оператор $A - \lambda_1 E$ имеет значение λ_1).

$$\det(A_1 - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^m$$

Рассм оператор A_1 на V^{λ_1} . Если V^{λ_1} имеет размерность n_1 , то $A_1|_{V^{\lambda_1}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdot \chi_1(\lambda)$$

$$\chi_1(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1}$$

Теорема (о разложении Л.О.)

Пусть V - линейное пространство над полем P (P - коммутативное кольцо).

A - линейный оператор $\Leftrightarrow$ матрица A над P .

- 1) Все корни $\chi_A(\lambda)$ лежат в P
- 2) Если $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - различные собственные значения A , то $V^{\lambda_1} \cap V^{\lambda_2} = \{0\}$

Доб-во:

1, 2 $\Rightarrow$ разложение Л.О.

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$$

Рассм оператор $A|_{V^{\lambda_i}}$ на V^{λ_i} и V^{λ_j} для $i \neq j$.

$$V^{\lambda_i} \cap V^{\lambda_j} = \{0\} \Rightarrow \dim(V^{\lambda_i} \cap V^{\lambda_j}) = 0$$

Рассм оператор $A|_{V^{\lambda_i}}$ на V^{λ_i} и V^{λ_j} для $i \neq j$.

